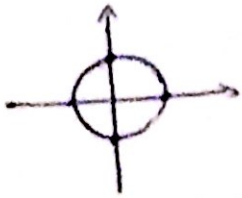
Απειροστικός Λογισμός Ι

Μάθημα 12

➔ Δίνεται η ακολουθία $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$



$$\begin{array}{cccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & \dots \\ \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

• Η υπακολουθία $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η σταθερή ακολουθία με όλους τους όρους ίσους με 0. $a_{2n-1}\to 0$.

$$\left[a_{2n-1} = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0\right]$$

• Η υπακολουθία $(a_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η σταθερή ακολουθία με όλους τους όρους ίσους με 1. $a_{4n}\to 1$

$$\left[a_{4n} = \cos\left(\frac{4n\pi}{2}\right) = \cos(2n\pi) = 1\right]$$

• Η υπακολουθία $(a_{4n-2})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η σταθερή ακολουθία με όλους τους όρους ίσους με -1. $a_{4n-2}\to -1$

$$\left[a_{4n-2} = \cos\left(\frac{(4n-2)\pi}{2}\right) = \cos(2n\pi - \pi) = \cos(-\pi) = -1\right]$$

Αν $x\notin\{-1,0,1\}$ δεν υπάρχει υπακολουθία της (a_n) που να συγκλίνει στο x.
[Επιλέγουμε $\varepsilon>0$ ώστε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\cap\{-1,0,1\}=\emptyset$ άρα $a_n\notin(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
Άρα, η (a_n) δεν έχει υπακολουθία που να συγκλίνει στο x.]

<u>Ορισμός</u>: Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ένας πραγματικός αριθμός x θα λέγεται σημείο συσσώρευσης (σ.σ.) της (a_n), αν υπάρχει μια υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που να συγκλίνει στο x. ($a_{k_n}\to x$).

<u>Παράδειγμα</u>: Για την $a_n=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ τα σημεία συσσώρευσης της είναι τα $-1,0,1$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Έστω K το σύνολο όλων των σημείων συσσώρευσης της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

[Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass προκύπτει $K\neq\emptyset$]

Το K είναι φραγμένο [διότι αν $\mu_1\le a_n\le\mu_2$ $\forall n\in\mathbb{N}$ τότε $\mu_1\le x\le\mu_2$ $\forall x\in K$]

Άρα το K έχει supremum και infimum. [Αποδεικνύεται ότι $\sup K\in K$ και $\inf K\in K$] ορίζουμε $\limsup a_n=\sup K$ (<u>ανώτατο όριο</u> της a_n ή <u>limes superior</u> της a_n) και $\liminf a_n=\inf K$ (<u>κατώτατο όριο</u> της a_n ή <u>limes inferior</u> της a_n)

Το σύνολο των σ.σ. της a_n $K=\{-1,0,1\}$
$\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$.

<u>Θεώρημα:</u> Αν (a_n) μια φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) $x \leq \limsup a_n \Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon>0$ το σύνολο $\{n\in\mathbb{N} : x-\varepsilon<a_n\}$ είναι άπειρο.

β) $\limsup a_n \leq x \Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon>0$ το σύνολο $\{n\in\mathbb{N} : x+\varepsilon<a_n\}$ είναι πεπερασμένο.

γ) $\liminf a_n \leq x \Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon>0$ το σύνολο $\{n\in\mathbb{N}: a_n<x+\varepsilon\}$ είναι άπειρο.

δ) $x\leq \liminf a_n \Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon>0$ το σύνολο $\{n\in\mathbb{N}: a_n<x-\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο

<u>Απόδειξη:</u> Παραλείπεται.

<u>Θεώρημα:</u> Η (a_n) συγκλίνει στο $x \Leftrightarrow \limsup a_n = x = \liminf a_n$

Γενικά: $\limsup a_n \geq \liminf a_n$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία και $\forall n\in\mathbb{N}$ θέτουμε $b_n=\sup\{a_k | k\geq n\}$

[Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ το σύνολο $\{a_k | k\geq n+1\}\subseteq\{a_k | k\geq n\}$. Άρα, $\sup\{a_k|k\geq n+1\}\leq$ $\sup\{a_k | k\geq n\}$. Επομένως, $b_{n+1}\leq b_n$. Άρα, η b_n είναι φθίνουσα]

Αποδεικνύεται.

Η b_n φθίνουσα και κάτω φραγμένη άρα συγκλίνουσα. $\lim b_n = \limsup a_n$.
Ομοίως, αν θέσουμε $\gamma_n = \inf\{a_k | k\geq n\}$ αποδεικνύεται πως η γ_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη άρα συγκλίνουσα. Οπότε, $\lim\gamma_n = \liminf a_n$.

<u>Ασκήσεις:</u>

1) Να υπολογιστεί το όριο της $a_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\sin(n^n)}{n+1}$

<u>Λύση:</u>
$$0 \leq |a_n| = \frac{\sqrt{n}|\sin(n^n)|}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$0 \to 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

Από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι $|a_n|\to 0$.
Άρα, $a_n\to 0$.

2) Να βρεθεί το όριο για τα διάφορα x,y (αν υπάρχει). $a_n = \dfrac{x^n-y^n}{x^n+y^n}$.

<u>Λύση:</u> Πρέπει να αποκλειστεί η περίπτωση $x=-y$ διότι τότε για κάθε περιττό n μηδενίζεται ο παρονομαστής (και δεν ορίζεται το a_n).

<u>1η περίπτωση:</u> $x=y$ Άρα, $a_n=0\to 0$.

<u>2η περίπτωση:</u> $|x|<|y|$

$$a_n = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^n-1}{\left(\frac{x}{y}\right)^n+1} \longrightarrow -1 \quad \left(\text{διότι } \left(\tfrac{x}{y}\right)^n\to 0\right)$$

3η περίπτωση: $|y|<|x|$

$$a_n=\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^n}\longrightarrow 1 \quad \left(\text{διότι } \left(\frac{y}{x}\right)^n\to 0\right).$$

3) Να υπολογιστεί το όριο της $a_n=\frac{x^n}{n!}$ όπου $x\in\mathbb{R}$.

Λύση:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{(|x|)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(|x|)^n}{n!}}=\frac{\frac{|x|^n\cdot|x|}{n!(n+1)}}{\frac{|x|^n}{n!}}=\frac{|x|}{n+1}\to 0.$$

Εφόσον $|0|<1$ συμπεραίνουμε ότι $a_n\to 0$.

4) Να υπολογιστεί το όριο της $a_n=\sqrt[n]{n!}$

Λύση: Θα δείξουμε ότι τείνει στο $+\infty$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

Έστω $M>0$. [Θέλουμε να δείξουμε ότι $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\geq n_0$ $a_n>M\Leftrightarrow\sqrt[n]{n!}>M\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n!>M^n\Leftrightarrow$ $\frac{M^n}{n!}<1$]

Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε δείξει ότι $\frac{M^n}{n!}\to 0$.

Άρα $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{M^n}{n!}<1$ $\forall n\geq n_0\Leftrightarrow a_n>M$ $\forall n\geq n_0$.

Επομένως, $a_n\to+\infty$.

5) Να βρείτε τα όρια της $a_n=\frac{2^n n!}{n^n}$ και της $b_n=\frac{3^n n!}{n^n}$

Λύση:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n(n)!}{n^n}}=\frac{2^{n+1}(n+1)!\cdot n^n}{2^n\, n!\,(n+1)^{n+1}}=\frac{2\cancel{(n+1)}\cdot n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n}=\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$\to\frac{2}{e}<1$. Άρα, η $a_n\to 0$.

Ομοίως, $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}\longrightarrow\frac{3}{e}>1$. Άρα, η $b_n\to+\infty$.

6) Να υπολογιστεί το όριο της $a_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$.

Λύση: Η (a_n) είναι υπακολουθία της $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ [για $k_n=2n$] η οποία συγκλίνει στο e. Άρα, και η $a_n\to e$.

7) Να υπολογιστεί το όριο της $b_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$.

Λύση: Εφόσον για την $a_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$ δείξαμε ότι $a_n\to e$ και $b_n=a_n^{1/2}$, συμπεραίνουμε πως $b_n\to\sqrt{e}$!

8) Να υπολογιστεί το όριο της $x_n=\frac{1}{n^{2/3}}+\dots+\frac{1}{(2n)^{2/3}}$.

Λύση:

$$x_n\geq(n+1)\cdot\frac{1}{(2n)^{2/3}}\geq\frac{n}{(2n)^{2/3}}=\frac{n}{2^{2/3}\cdot n^{2/3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}n^{1/3}\to+\infty.$$

Άρα, $x_n\to+\infty$.

9) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών ώστε $a_n \to \ell$ με $\ell > 0$.
Να δείξουμε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

Λύση: Εφόσον $a_n \to \ell$ από τον ορισμό για $\varepsilon = \ell/2$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - \ell| < \ell/2$ $\forall n \geq n_1$.

0, $\ell - \ell/2 = \ell/2$, ℓ, $\ell + \ell/2 = 3\ell/2$

$\Rightarrow \ell - \ell/2 < a_n < \ell + \ell/2$ $\forall n \geq n_1$

$\Rightarrow \ell/2 < a_n < 3\ell/2$ $\forall n \geq n_1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{\ell/2} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{3\ell/2}$ $\forall n \geq n_1$. Όμως, $\sqrt[n]{\ell/2} \to 1$ και $\sqrt[n]{3\ell/2} \to 1$.

Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

10) Να υπολογιστεί το όριο της $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n}$

Λύση: Η ακολουθία $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ ως υπακολουθία της $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ τείνει στο e.
Από την προηγούμενη άσκηση $\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n} \to 1$. Δηλαδή, $x_n \to 1$.

11) Έστω (a_n) μια συγκλίνουσα ακολουθία με $a_n \to x$, $x \in \mathbb{R}$.
Θέτουμε $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$. Να δείξουμε ότι $b_n \to x$.
Να δειχθεί με κατάλληλο παράδειγμα, πως δεν ισχύει το αντίστροφο.

Λύση: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε $x = 0$.

[Ας υποθέσουμε πως το έχουμε αποδείξει για $x = 0$
Αν $a_n \to x$ τότε $a_n - x \to 0$ και άρα $\frac{(a_1 - x) + (a_2 - x) + \dots + (a_n - x)}{n} \to 0$
$\Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \frac{nx}{n} \to 0 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - x \to 0 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \to x$.]

Υποθέτουμε ότι $a_n \to 0$.
Εφόσον η a_n είναι συγκλίνουσα είναι και φραγμένη. Άρα $\exists M > 0$ ώστε $|a_n| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Δείχνουμε ότι $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \to 0$

Έστω $\varepsilon > 0$

Εφόσον $a_n \to 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_1$

Επιλέγω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > \frac{2 n_1 \cdot M}{\varepsilon}$

$\frac{n_1 \cdot M}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$

Για κάθε $n \geq n_0$

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right| \leq \frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|}{n} \leq \frac{\overbrace{M + M + \dots + M}^{n_1\text{-φορές}} + \overbrace{\varepsilon/2 + \varepsilon/2 + \dots + \varepsilon/2}^{(n-n_1)\text{-φορές}}}{n} =$$

$$= \frac{n_1 \cdot M + (n - n_1) \cdot \varepsilon/2}{n} < \frac{n_1 \cdot M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{n_1 \cdot M}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Επομένως, $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \to 0$.